

# CIP 法による時間領域音場解析 多孔質材の吸音境界条件の検討 \*

太刀岡勇気, 安田洋介, 佐久間哲哉 (東大・新領域)

## 1 はじめに

時間領域の音場解析手法としてしばしば用いられる時間領域差分法 (FDTD 法) は、数値分散が大きいことと時間離散化幅に厳しい制限が課せられるという欠点を持つ。一方流体力学の分野では、特性曲線法と 3 次多項式による補間を組み合わせた Constrained Interpolation Profile (CIP) 法が提案されている [1]。この手法は数値分散が小さいことや、CFL 条件にとらわれない計算を可能であるという利点を持つため音場解析にも適用が進みつつあり [2]、筆者らは室内音場解析へ適用を行っている [3]。同報においては周波数特性を持たない実数のインピーダンス境界条件を導入したが、実際の室内音場問題への適用にあたっては、様々な吸音材の特性を有する境界条件を実現する必要がある。既往研究においても密度・音速の異なる媒質間の伝搬手法が提案されているのみであり [4]、周波数特性は考慮されていない。本報では、Rayleigh モデルによって吸音材をモデリングする手法と、任意の周波数特性を持つ吸音境界条件を実現するためにデジタルフィルターを用いる手法を CIP 法に導入しその有効性を検証した。

## 2 Rayleigh モデルの CIP 法への導入

多孔質材の吸音機構のモデリングには Rayleigh モデルがよく用いられ [5]、FDTD 法において有用性が確認されている [6]。CIP 法に Rayleigh モデルを導入し、音響管を用いてその妥当性の検証を行う。

### 2.1 定式化

Rayleigh モデルを導入した多孔質材内部の 2 次元での支配方程式は以下ようになる。

$$\frac{K}{\Omega} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + Ru + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{K}{\Omega} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + Rv + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho c^2}{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (3)$$

ただし  $\rho$  は空気の密度 [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]、 $c$  は空気中の音速 [ $\text{m}/\text{s}$ ]、 $\Omega$  は多孔度、 $K$  は構造因子、 $R$  は流動抵抗 [ $\text{Ns}/\text{m}^4$ ] である。これを方向分離して、空気中の波動伝搬の場合と同じように移流方程式に変形すると、 $x$  軸方向に関しては以下ようになる (負方向、 $y$  軸方向についても同様)。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{K}{\Omega} \rho cu + p \right) + c \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K}{\Omega} \rho cu + p \right) \\ = -Rcu + \frac{(K-1)\rho c^2}{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad (4)$$

特によく仮定される  $K = \Omega = 1$  のときは

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho cu + p) + c \frac{\partial}{\partial x} (\rho cu + p) = -Rcu \quad (5)$$

のようになる。このような非移流項 (外力項) を持つ移流方程式を CIP 法で解くためには、外力を時間ステップ中一定と仮定した時間分離解法がよく用いられる。手順は以下の通りである。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho cu + p)^n + c \frac{\partial}{\partial x} (\rho cu + p)^n = 0 \quad (6)$$

を CIP 法で解いて中間値  $\rho cu^*, p^*$  を求める。その後外力項を差分で解き  $n+1$  ステップの値を求める。

$$(\rho cu + p)^{n+1} = \rho cu^* + p^* - \Delta t \frac{R}{\rho} \rho cu^* \quad (7)$$

この手法では吸音材内部には適当な  $R$  を、空気中には  $R = 0$  と与えるだけで両領域が簡便に扱える。 $\Omega \neq 1$  のときは、吸音材の密度を  $\rho_{abs} = \rho/\Omega$  として、文献 [4] の方法に従って密度の異なる媒質間での伝搬として扱えばよい。本報では  $K = \Omega = 1$  とする。

ここで用いた方向分離手法と時間分離手法により、精度が低下する可能性がある。特に後者の時間分離解法は時間ステップ中で外力が一定と仮定しているため、時間離散化幅を十分小さくする必要がある。

### 2.2 音響管での検討 背後が剛壁の場合

以上のようにして導入した Rayleigh モデルの CIP 法における妥当性を検証するため、Fig. 1 に示す音響管を用いて、複素音圧反射率・垂直入射吸音率の理論解との比較を行った。音響管の長さは 3 m、管径は 5 cm の矩形形状で、管壁はすべて剛とし、2 次元で検討を行った。これの右端に密着させる形で、厚さ 10 cm、流動抵抗  $R = 15000$  [ $\text{Ns}/\text{m}^4$ ] の吸音材を設置した。受音点については試料表面から 1 m のところに R0 を、複素音圧反射率を伝達関数法で求めるために 30, 40 cm のところに R1, R2 を設定した。本報では 1500 Hz までを対象とし、その波長の 10 分の 1 程度である 2.5 cm を空間離散化幅とした。時間分離解法を用いるためには、時間離散化幅が小さいこ

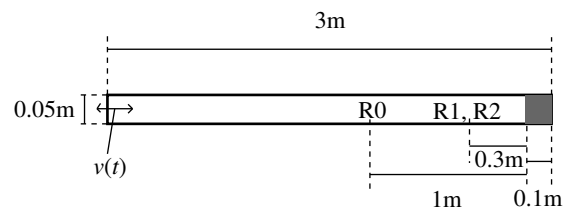


Fig. 1 Geometry of a sound tube with a porous material (0.1 m thickness).

\*Time domain sound field analysis by the CIP method: Study on the boundary condition of porous materials, by TACHIOKA Yuuki, YASUDA Yosuke and SAKUMA Tetsuya (The University of Tokyo).

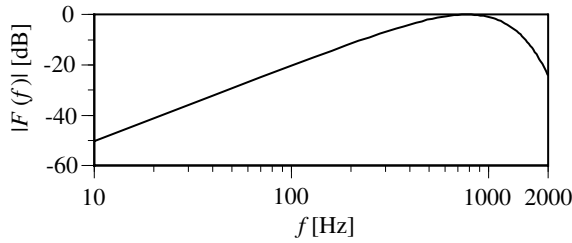


Fig. 2 Spectrum of a vibration source.

とが必要条件であるため、時間離散化幅  $\Delta t$  に関しては十分小さいと思われる  $7.14 \mu\text{s}$  ( $CFL = 0.098$ )、特に工夫を用いない CIP 法の適用限界程度の  $71.4 \mu\text{s}$  ( $CFL = 0.98$ )、3 次元の FDTD 法の安定条件程度の  $35 \mu\text{s}$  ( $CFL = 0.48$ ) の 3 段階で検討した。左端を式 (8) で表される振動速度で速度駆動した [7]。

$$u(t) = \frac{\beta}{\rho c} (12\alpha^2(t - \tau) - 8\alpha^3(t - \tau)^3) \cdot \exp(-\alpha(t - \tau)^2) \quad (8)$$

各種パラメータは  $\tau = 3.57 \text{ [ms]}$ ,  $\alpha = 4 \cdot 10^6$ ,  $\beta = 5.4 \cdot 10^{-10}$  に設定した。これは Fig. 2 に示すようにパワースペクトルのピークから  $-20 \text{ dB}$  の点で評価して、 $100 \text{ Hz}$  から  $1800 \text{ Hz}$  までの周波数が含まれるような音源である。 $\beta$  はスペクトルの強度に関する変数であり、 $\alpha$  はスペクトルのピーク周波数に関する変数である。R0 における入射波と反射波を Fig. 3 に示す。全体的に振幅が減衰しているのと同時に、入射波にあった波形後部のディップが、反射波ではなくなっている。伝達関数法によって解析結果から Fig. 4

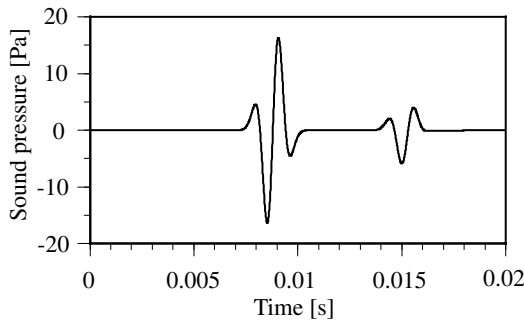


Fig. 3 The incident and reflected wave at R0 calculated by the CIP method according to the Rayleigh model ( $\Delta t = 7.14 \mu\text{s}$ ).

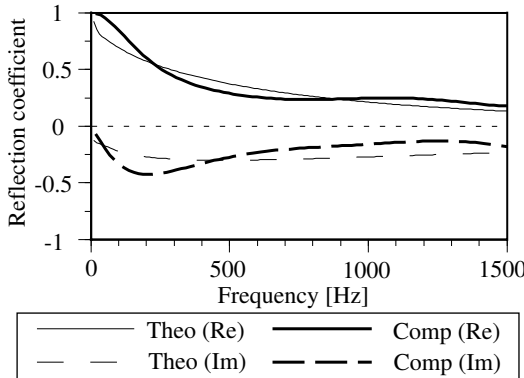


Fig. 4 Complex reflection coefficients calculated by the theory and the CIP method according to the Rayleigh model ( $\Delta t = 7.14 \mu\text{s}$ ).

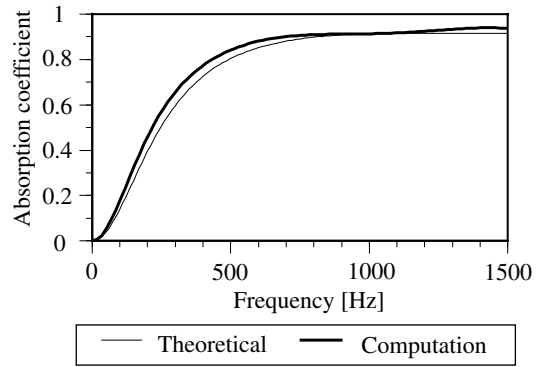


Fig. 5 Normal incidence absorption coefficients calculated by the theory and the CIP method according to the Rayleigh model ( $\Delta t = 7.14 \mu\text{s}$ ).

に示す複素音圧反射率を求めた。実数部に関してはよく一致しており、その差は最大  $0.1$  程度である。虚数部は多少傾向が異なっており、計算結果では  $250 \text{ Hz}$  付近に、理論解にないディップが見られる。対応する垂直入射吸音率を Fig. 5 に示す。  $500 \text{ Hz}$  付近に最大  $0.05$  程度の差異がみられる。次に、 $\Delta t$  を  $10$  倍の  $71.4 \mu\text{s}$  ( $CFL = 0.98$ ) とした場合の R0 における入射波と反射波を Fig. 6 に示す。同時に  $\Delta t = 7.14 \mu\text{s}$  の場合を参照解として示している。振幅・波形とも前の検討とは全く異なり、吸音層が十分に効いていない。垂直入射吸音率を Fig. 7 に示す。このように、低周波数域だけでなく高周波数域も一致しないことが分かる。同時に 3 次元の差分法の安定条件程度の  $\Delta t = 35 \mu\text{s}$  ( $CFL = 0.48$ ) とした場合の垂直入射吸音率を示す。高周波数域においては改善が見られ、

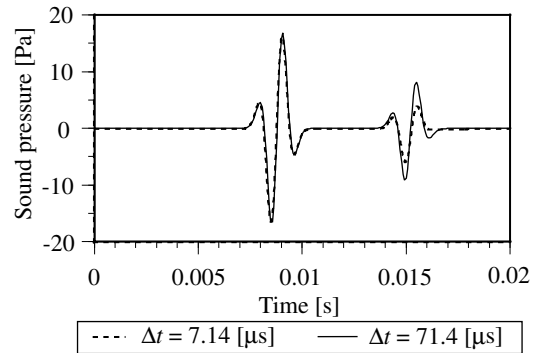


Fig. 6 The incident and reflected wave at R0 (Rayleigh model,  $\Delta t = 7.14, 71.4 \mu\text{s}$ ).

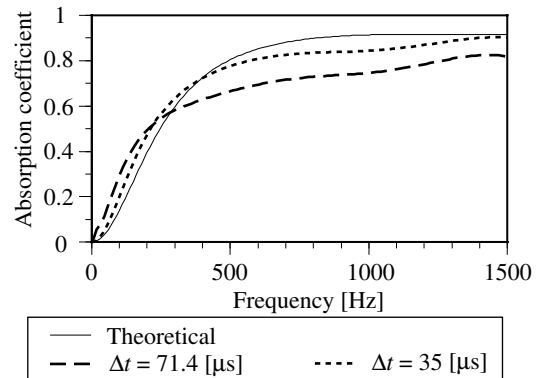


Fig. 7 Normal incidence absorption coefficients (Rayleigh model,  $\Delta t = 71.4, 35 \mu\text{s}$ ).

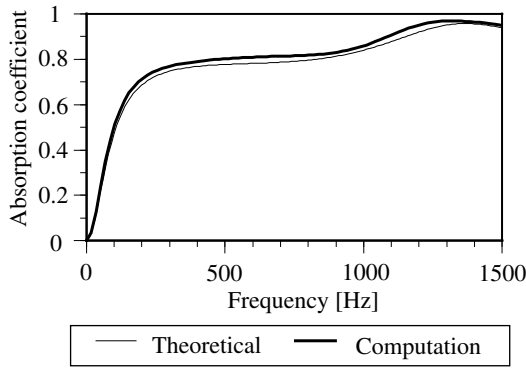


Fig. 8 Normal incidence absorption coefficients calculated with a porous material (0.1 m thickness) and an air layer (0.1 m thickness) ( $\Delta t = 7.14 [\mu\text{s}]$ ).

その差は最大 0.1 程度である。このように時間分離手法を用いて Rayleigh モデルによる吸音材の内部伝搬を解く際には、吸音材中の時間分散化幅を通常の空気中の伝搬に比べて小さく取る必要がある。

### 2.3 音響管での検討 背後に空気層を持つ場合

2.2 と同様の形状で厚さ 10 cm の吸音材の背後に空気層 10 cm とした場合を検討した。各パラメータは同じで、時間分散化幅は十分小さいと思われる  $7.14\mu\text{s}$  とした。垂直入射吸音率を Fig. 8 に示す。よく一致しており、多層である場合にも本手法が適用可能である。複素音圧反射率についても一致した。

## 3 フィルターを用いる方法

FDTD 法では周波数特性を持たない実数のインピーダンスを境界条件として与えることが多い。バネマス系を用いる手法も提案されているものの [6]、任意の吸音特性の設計は難しい。これに対し、境界面への入射・反射をそれぞれ入・出力とするフィルターを積み込むことで複素数のインピーダンスを与え、周波数特性を持つ出力を得ることができる。この手法をスタガード格子を用いる FDTD 法に導入するのは難しいが、CIP 法に導入するのは簡単で周波数特性を持つ境界条件を簡便にモデリングすることができる。

CIP 法の境界条件は、負方向に移流する成分  $f_x^- = \rho c u - p$  が境界で反射して正方向に移流する際には

$$f_x^+ = \frac{1-z}{1+z} f_x^- = r f_x^- \quad (9)$$

のようになる。正方向に移流する成分を  $f_x^+ = \rho c u + p$  とした。ここで入力を  $f_x^-$ 、出力を  $f_x^+$ 、 $r$  を反射率と考えれば、境界をひとつのシステムと考えた場合の伝達関数は境界面の反射率のみで定義できる。CIP 法と同じく反射率で境界条件を規定できる伝達線路網法での手法 [8] と同様に、デジタルフィルターによる方法を導入する。つまり、伝達関数の特性が境界面の複素数の反射率に一致するフィルターを設計する。

### 3.1 音響管での検討 FIR フィルター

ここでは 2.2 と同じ、流動抵抗  $R = 15000 [\text{Ns/m}^4]$  で 10 cm の厚みを持つ吸音材を剛壁に密着させた場合の理論解のインピーダンスをフィルターの特性として与えることにする。時間分散化幅は  $71.4\mu\text{s}$  とす

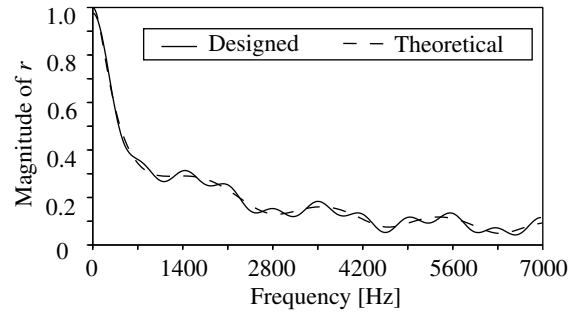


Fig. 9 Designed and theoretical magnitude of  $r$  (40th order FIR filter,  $\Delta t = 71.4 [\mu\text{s}]$ ).

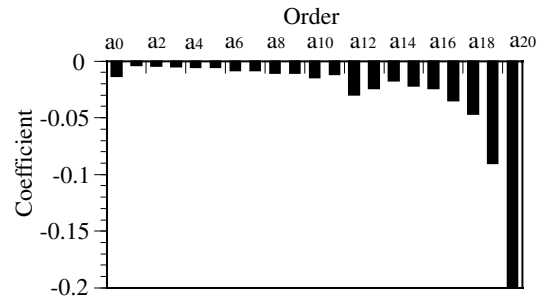


Fig. 10 FIR filter coefficients (0-20th order).

る。ここでは位相特性を変化させることなく吸音率を与えるための手法として、群遅延特性が一定となる直線位相フィルターを設計する。直線位相の FIR フィルターを用いて、振幅特性のみをあわせることにする。反射率  $r$  の振幅特性・設計されたフィルターの振幅特性は Fig. 9 のようである。Fig. 10 にフィルターの係数の図を示す (対象であるので半分だけ示している)。理論特性を 10 Hz 刻みでサンプリングして、フィルターの設計特性として与える。本検討では、Scilab の Signal Processing toolbox にある Minimax 近似で Remez のアルゴリズムを用いて振幅特性を近似する remezb 関数を用いて設計を行った (重み関数はすべて 1)。フィルターの次数は 40 次で、設計された零位相フィルターを次数の半分の 20 次分シフトすることで、直線位相 FIR フィルターにしている。R0 における入射波と反射波を、Fig. 11 に示す。比較のために Rayleigh モデルの波形を載せているが、フィルターを用いたものは直線位相特性であるため波形の崩れはないことが分かる。また Fig. 12 に対応する垂直入射吸音率を求めた。同じ時間分散化幅で、Rayleigh モデルで吸音材をモデリングした場合には、全く合わ

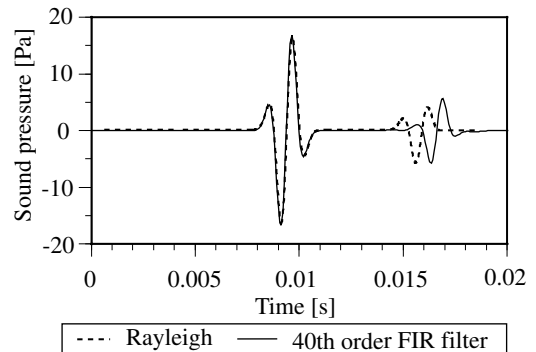


Fig. 11 The incident and reflected wave at R0 (40th order FIR filter,  $\Delta t = 71.4 [\mu\text{s}]$ ).

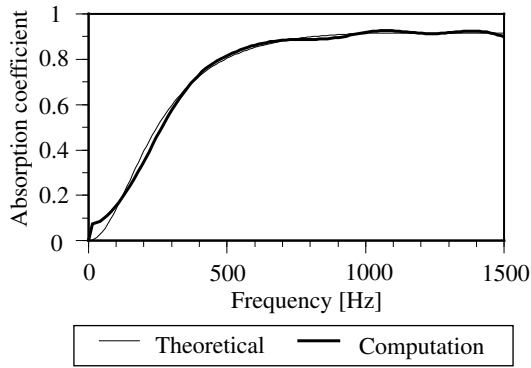


Fig. 12 Normal incidence absorption coefficients (40th order FIR filter,  $\Delta t = 71.4 \mu\text{s}$ ).

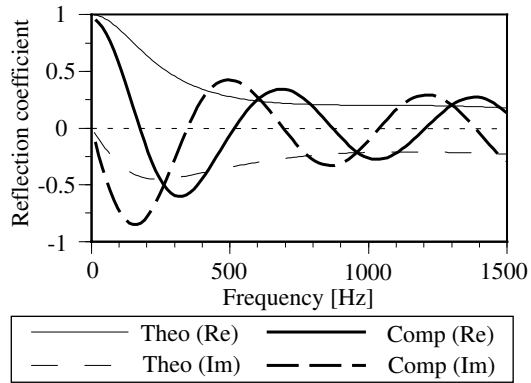


Fig. 13 Complex reflection coefficients (40th order FIR filter,  $\Delta t = 71.4 \mu\text{s}$ ).

なかった垂直入射吸音率がよい対応を見せていることが分かる。Fig. 13 に複素音圧反射率を示す。群遅延特性  $20\Delta t$  に対応する 700 Hz の周期が見える。

### 3.2 音響管での検討 IIR フィルター

次に 20 次の IIR フィルターの設計を行った。時間分散化幅は  $71.4 \mu\text{s}$  として同様に設計すると Fig. 14 のようになる。本検討では、同 toolbox にある最小 2 乗近似で振幅特性を近似する yulewalk 関数を用いて設計を行った。R0 における入射波と反射波を、Fig. 15 に示す。Rayleigh モデルとよく対応している。また Fig. 16 に対応する垂直入射吸音率を示す。こちらは Fig. 17 に示す複素音圧反射率も理論解とよく一致した。これは Miki モデルでもよく一致した。

## 4 まとめと今後の課題

多孔質材の吸音特性をモデリングする手法として Rayleigh モデルを導入し、時間分散化幅が小さい場

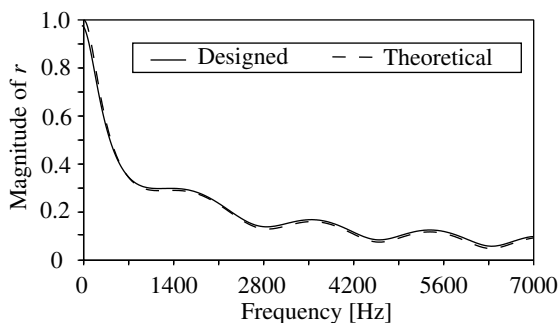


Fig. 14 Designed and theoretical magnitude of  $r$  (20th order IIR filter).

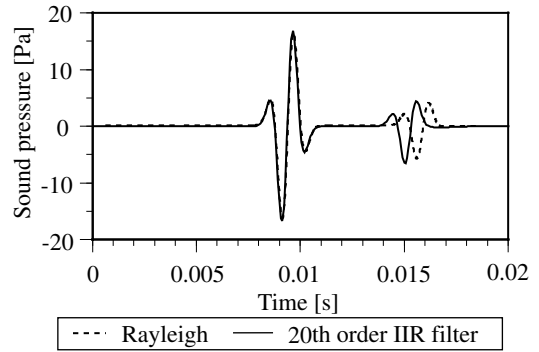


Fig. 15 The incident and reflected wave at R0 (20th order IIR filter,  $\Delta t = 71.4 \mu\text{s}$ ).

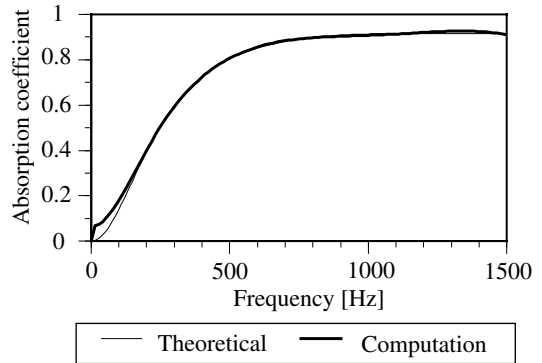


Fig. 16 Normal incidence absorption coefficients (20th order IIR filter,  $\Delta t = 71.4 \mu\text{s}$ ).

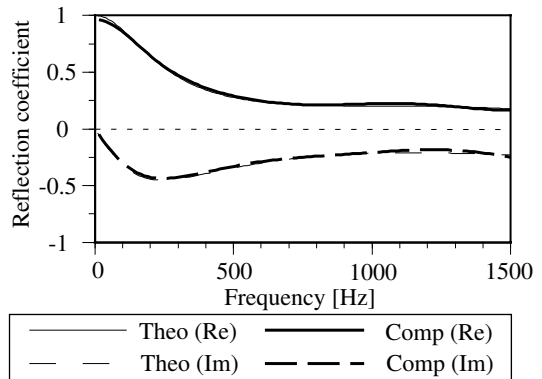


Fig. 17 Complex reflection coefficients (20th order IIR filter,  $\Delta t = 71.4 \mu\text{s}$ ).

合には有効であった。時間ステップ中の外力を一定とした時間分散化手法の改善は課題である。またフィルターを用いる簡便な方法を検討し、設計も簡単で時間分散化幅も大きくできた。IIR フィルターを用いることで位相特性もあわせることができた。

## 参考文献

- [1] 矢部 他, 「CIP 法」, 森北出版, 2003.
- [2] 斉藤 他, 信学論, pp. 576-580, 2006. 6.
- [3] 太刀岡 他, 建音研資 AA2007-28, 2007. 7.
- [4] 大久保 他, 音講論 (秋), pp. 1329-1330, 2007. 9.
- [5] H.Kuttruff, "Room Acoustics 2nd edition", pp. 144-155, Applied Science Publishers, 1979.
- [6] 坂本 他, 音講論 (秋), pp. 781-782, 1996. 9.
- [7] 大久保 他, 信学技報 (EA), pp. 25-30, 2006. 9.
- [8] 土屋 他, 音講論 (秋), pp. 541-542, 2006. 9.