CIP 法による時間領域音場解析 — 空間離散化幅の検討および任意形状への対応 —*

◎太刀岡勇気, 安田洋介, 佐久間哲哉 (東大・新領域)

1 はじめに

時間領域の音場解析手法としてしばしば用いられる時間領域差分法 (FDTD 法) は、数値分散が大きく空間精度を向上させるためには空間離散化幅を小さく取らなければならない。そのため CFL 条件により時間離散化幅に厳しい制限が課せられる。

一方流体力学の分野では、特性曲線法と 3 次多項式による補間を組み合わせた Constrained Interpolation Profile (CIP) 法が提案されており [1]、音場解析にも適用が進みつつある [2]。筆者らは室内音場解析へ適用を行い [3, 4]、CFL 条件にとらわれない計算が可能であり、空間精度が高く数値分散が小さいという一般的な特長を確認した。CIP 法は同じ空間・時間離散化幅では FDTD 法より計算負荷が大きくなることが知られているが、これらの特長を考慮すれば、時間離散化幅のみを大きくする、空間・時間離散化幅をともに大きくするということによって計算負荷の低減が考えられる。本報ではその可能性を検討する。なお本報では多次元化に際して方向分離を行う M 型 CIP 法を対象としている。

また FDTD 法は任意形状に対応する際に階段近似を用いることが多いが、精度が低下するため空間離散化幅を小さくする必要がある。さらにプリ・ポストプロセスの汎用化が難しいことの原因ともなっている。これを解決するため任意の 3 角形/4 面体要素において CIP 補間を行う CIVA (Cubic Interpolation with Volume/Area coordinates) 法が流体力学分野で提唱されている。本報ではその適用可能性を検討する。

2 時間離散化幅の検討

1 辺 1 mの立方体で全面吸音率 0.1 とした場合に、CFL 条件を超えるような時間離散化幅での検討を行った。音源・受音点は Fig. 1 に示した。音源として 1 kHz の 1/3 オクターブバンド上限までが含まれるようなガウス分布を初期空間分布として与えた。空間離散化幅 Δx は FDTD 法において一般的に推奨されている最短波長の 10 分の 1 程度 ($\lambda/\Delta x = 10$) の 0.033 m とした。時間離散化幅 Δt は標準程度の 0.05 ms ($CFL = 0.52$)、0.15 ms ($CFL = 1.56$)、0.5 ms ($CFL = 5.2$) の 3 通りで検討した。インパルス応答積分法により求めた残響曲線の-5dB から-35dB までの減衰で評価した残響時間を Fig. 2 に示す。時間離散化幅を大きくすると、残響後期に振動が残り精度が低下した。1 次元音場での本手法の有効性は検証されているため [3]、方向分離手法を用いていることが原因であると考えられる。

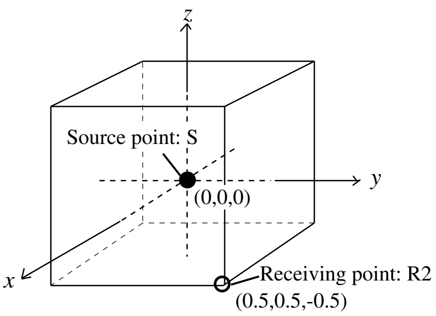

Fig. 1 Geometry of a cubic cavity.

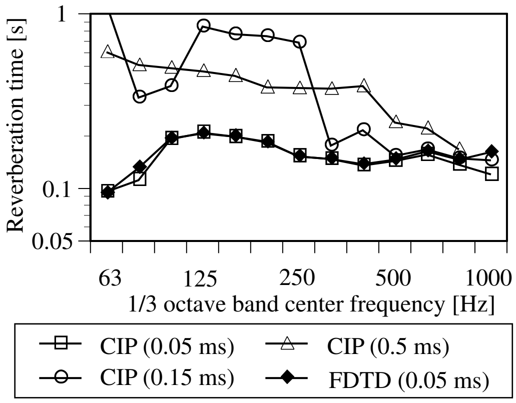

Fig. 2 Reverberation time at R2 calculated by the CIP method ($\Delta t = 0.05$,0.15,0.5 ms) and the FDTD method ($\Delta t = 0.05$ ms) under conditions such that Δx is 0.033 m.

3 空間離散化幅の検討

以上のように空間離散化幅を変えずに時間離散化幅のみを大きくする手法は有効でない。そこで $CFL = 0.52$ として、空間・時間離散化幅をともに変化させる手法を検討した。Δx は 0.033 m ($\lambda/\Delta x = 10$)、0.05 m ($\lambda/\Delta x = 7.5$)、0.066 m ($\lambda/\Delta x = 5$) の 3 通りとした。Δt もそれぞれ 0.05 ms、0.075 ms、0.1 ms とした。残響時間を Fig. 3 に示す。このように CIP 法・FDTD 法ともにおおむね一致しているものの、FDTD 法は高周波数域で精度が低下している。Fig. 4 に示す全周波数域での残響曲線でも FDTD 法の乖離が大きい。次に波形の観点から検討する。CIP 法で $\Delta x = 0.033$ m のときを参照解 p_{ref} として、次式で表される 2 乗誤差を求めた。

$$Error = \frac{\sum_{i=0}^{N}(p - p_{ref})^2}{\sum_{i=0}^{N} p_{ref}^2} \tag{1}$$

*Time domain sound field analysis by the CIP method: Study on the spatial discretization and the use of triangle / tetrahedral meshes, by TACHIOKA Yuuki, YASUDA Yosuke and SAKUMA Tetsuya (The University of Tokyo).

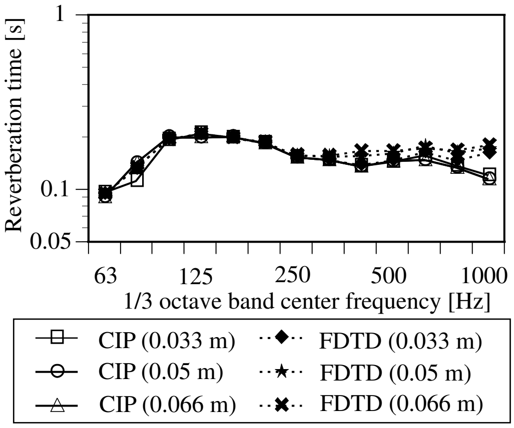

Fig. 3　Reverberation time at R2 calculated by the CIP method and the FDTD method ($\Delta x = 0.033$, 0.05, 0.066 m) under conditions such that CFL is 0.52.

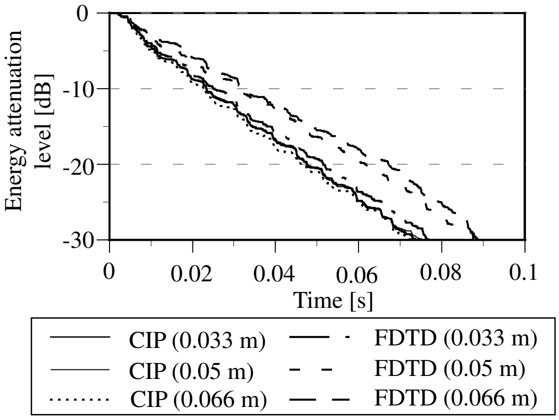

Fig. 4　Energy attenuation decay curves.

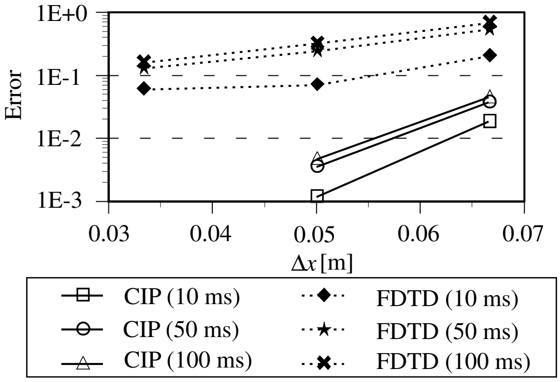

Fig. 5　Square errors with Δx and the elapsed time.

すべて $\Delta t = 0.05$ ms でリサンプリングし、0.01 s までの $N = 200$ 点、0.05 s までの $N = 1000$ 点、0.1 s までの $N = 2000$ 点を対象とした。結果を Fig. 5 に示す。このように対象とした時間に関わらず、CIP 法の方が空間離散化幅を大きくした場合にも誤差が小さいことがわかる。FDTD 法の $\Delta x = 0.033$ m を参照解とした場合にも同様であった。まとめると、FDTD 法は空間離散化幅を大きくすると Fig. 6 に示すように波形の崩れ方は大きくなるものの、残響時間の精度はそれほど損なわれない。CIP 法は数値分散性が小さいため空間離散化幅を大きくしたときにも、時間領域での波形を精度よく求めることができる。

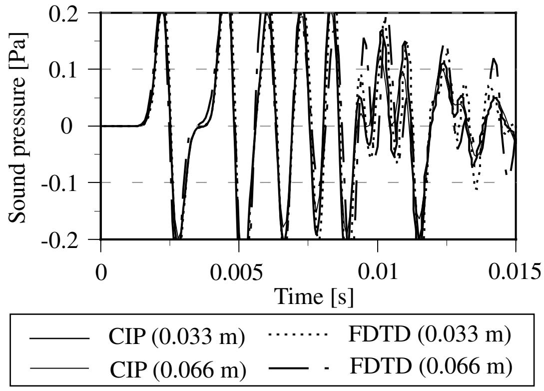

Fig. 6　Pseudo impulse responses at R2 calculated by the CIP method and the FDTD method.

4　CIVA 法について

任意形状への対応には、基礎方程式を座標変換によって一般座標系から直交座標系に写像する方法が考えられるが、この方法を CIP 法に適用すると精度が悪くなることが知られているため [1]、本報では 3 次多項式を多次元空間に張る手法を採用する。ところが多次元での完全 3 次多項式の未知数の数と既知数の数が一致しないため問題がある。単体要素 (3 角形/4 面体要素) と自然座標 (面積/体積座標) を用いることで、節点の関数値と微係数が連続な補間関数を系統的に求められることが示されており、CIVA 法と呼ばれる [5]。ただし CIVA 法は補間関数が要素境界上の節点間の接線方向には連続であるが法線方向には連続でない非適合要素であるため、空間 2 次精度になってしまうという点が指摘されている [6]。

4.1　2 次元 － 3 角形要素 －

面積座標を用いて 2 次元 3 次の補間関数を求める。3 角形の面積座標は

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(\frac{S_1}{S}, \frac{S_2}{S}, \frac{S_3}{S}\right) \tag{2}$$

で表され、形状関数に一致する。ただし S は 3 角形の面積であり、S_1 から S_3 は Fig. 7 のように取る。面積座標は $S_1 + S_2 + S_3 = S$ より $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$ の関係があり、(x, y) 座標との間に 1 対 1 の対応関係

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

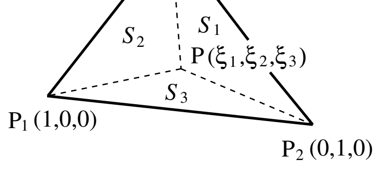

Fig. 7　Area coordinates.

が成立する。このとき、3 次補間関数は

$$f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\xi_i+d\sum_{\substack{j,k=1\\j\neq k}}^{3}\beta_{jk}\left[\xi_j^2\xi_k+c\xi_1\xi_2\xi_3\right] \tag{4}$$

で与えられる。d は補間関数の調整変数で $d=0$ のとき 1 次補間、1 のとき 3 次補間である。α_i と β_{jk} は

$$\alpha_i = f_i \tag{5}$$

$$\beta_{jk} = f_j-f_k+(x_k-x_j)\frac{\partial}{\partial x}f_j+(y_k-y_j)\frac{\partial}{\partial y}f_j \tag{6}$$

となる。$\xi_1\xi_2\xi_3$ は節点の値によって規定することができないため節点が持つ値から変数 c の値を決定することはできないが、構造解析の分野でよく用いられる定曲率条件を用いると全ての要素において $c=0.5$ とすることができる。$c<0.5$ とした場合は数値粘性が加わることになる [7]。

4.2 3 次元 ― 4 面体要素 ―

3 次元の場合は体積座標を用いる。体積座標は

$$(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=\left(\frac{V_1}{V},\frac{V_2}{V},\frac{V_3}{V},\frac{V_4}{V}\right) \tag{7}$$

で表される。V は 4 面体の体積であり、V_1 から V_4 は Fig. 8 のように取る。このとき 3 次補間関数は

$$\begin{aligned}f(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) &= \sum_{i=1}^{4}\alpha_i\xi_i+d\sum_{\substack{j,k=1\\j\neq k}}^{4}\beta_{jk}\Big[\xi_j^2\xi_k\\&\quad+c(\xi_1\xi_2\xi_3+\xi_2\xi_3\xi_4\\&\quad+\xi_1\xi_2\xi_4+\xi_1\xi_3\xi_4)\Big]\end{aligned} \tag{8}$$

で与えられる。α_i と β_{jk} は以下のようである。

$$\alpha_i = f_i \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\beta_{jk} &= f_j-f_k+(x_k-x_j)\frac{\partial}{\partial x}f_j+(y_k-y_j)\frac{\partial}{\partial y}f_j\\&\quad+(z_k-z_j)\frac{\partial}{\partial z}f_j\end{aligned} \tag{10}$$

d,c に関しては 2 次元の場合と同様である。

CIVA 法は多次元の移流方程式にも対応できるが、非移流項の扱いが難しいため方向分離手法を用いる。すなわち Fig. 9 のように x 軸方向への移流を行いその後 y,z 軸方向への移流を行うことにする。

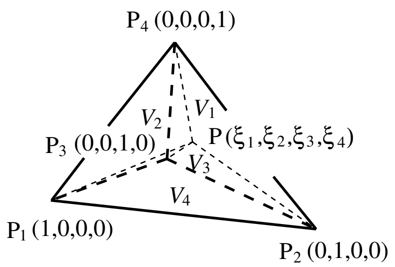

Fig. 8 Volume coordinates.

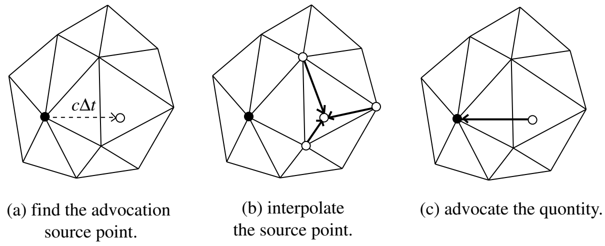

Fig. 9 The procedure of the CIVA method.

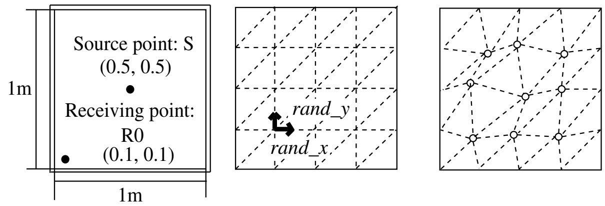

Fig. 10 Geometry of a 2D sound field and generated nonuniform meshes.

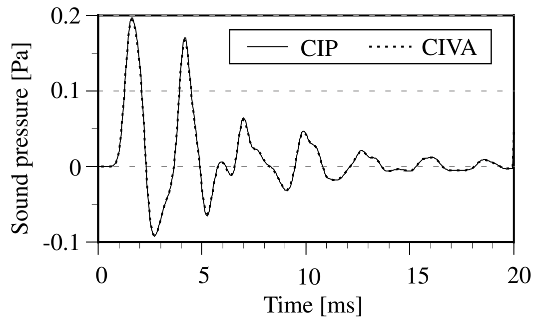

Fig. 11 Pseudo impulse responses at R0 calculated by the CIP method using rectangular elements and the CIVA method using nonuniform and noncompatible triangle elements (2D).

5 CIVA 法の音響問題への適用

5.1 2 次元音場

Fig. 10 に示す 1 辺 1 m の正方形音場で、不均一な 3 角形要素を用いて精度を検証した。境界の吸音率は 0.5 とした。不均一な 3 角形要素は以下の手順で作成した。全体を $\Delta x=0.033$ [m] の正方形に分割し、その端点を-0.01 以上 0.01 m 以下 (1/3 要素幅程度) の乱数分 x,y それぞれの方向に移動させた。得られた不整形 4 角形要素を半分に分割することで不均一な 3 角形要素とした。$\Delta t=0.05$ [ms] とした。計算結果を直交格子での M 型 CIP 法の結果 [4] と比較したものを、Fig. 11 に示す。一致していることが分かる。

5.2 3 次元音場

3 次元の場合にも、Fig. 1 に示した全面剛の 1 辺 1 m の立方体で検討を行った。まずは直交分割による立方体を等積 6 分割した 4 面体要素を用いて検討した。$\Delta x=0.033$ m、$\Delta t=0.05$ ms とした。よって分割前の立方体の稜線上に必ず移流元が存在することになる。結果は Fig. 12 であるが、振動が起こりすぐに発散している。これは先に述べたように CIVA 法が非適合要素を用いていることが原因であると考えられるため、これを実験的に検証した。直交分割であれば、方向分離を用いているため移流元の要素界面は各軸に平行である。そこで直交方向の微分に 1 次補間を用いれば、要素間で連続になるため改善が期

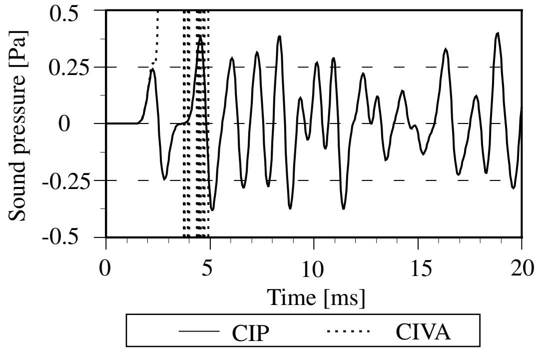

Fig. 12 Pseudo impulse responses at R0 calculated by the CIP method and the CIVA method using non-compatible rectangular-based elements. (3D)

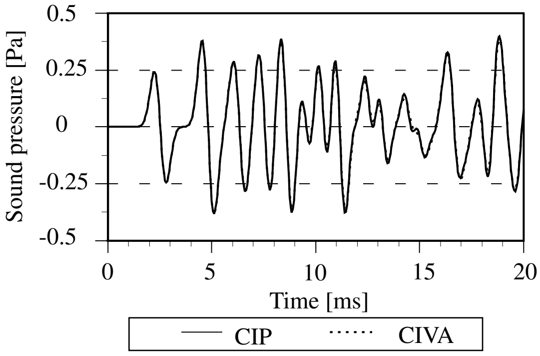

Fig. 13 Pseudo impulse responses at R0 calculated by the CIP method and the CIVA method using compatible rectangular-based elements with normal derivative as a first-order interpolation. (3D)

待される。例えば x 軸方向への移流の際には y, z 軸方向の微分を

$$\frac{\partial}{\partial y}f = \xi_1\frac{\partial}{\partial y}f_1 + \xi_2\frac{\partial}{\partial y}f_2 + \xi_3\frac{\partial}{\partial y}f_3 + \xi_4\frac{\partial}{\partial y}f_4 \quad (11)$$

などから求める。結果を Fig. 13 に示す。このように発散せず CIP 法の結果と一致している。

5.3 3 次元における CIVA 法の適合要素化

5.3.1 稜線上での適合要素化

非適合要素が発散の一因であるため、一般の 4 面体要素では適合要素化する必要がある。2 次元で検討はされているが [6]、3 次元で検討を行った文献は見られないためその拡張を行う。3 次元では稜線上と要素界面の両方で適合要素化する必要があり、まずは前者を行う。そのためには、対象とする辺上で式 (12) で表されるような特異形状関数に適当な変数 μ をかけたものを式 (8) の 3 次補間関数に加え補間関数とする。つまり 6 辺について $\mu_1\epsilon_{12}+\mu_2\epsilon_{13}+\mu_3\epsilon_{14}+\mu_4\epsilon_{23}+\mu_5\epsilon_{24}+\mu_6\epsilon_{34}$ を加える。例えば辺 P_1P_2 では

$$\epsilon_{\overline{12}} \quad = \quad \frac{\xi_1^2\xi_2^2(\xi_3+\xi_4)}{(1-\xi_1)(1-\xi_2)} \qquad (12)$$

とする。辺 P_1P_2 以外の辺では関数値と法線方向微分値は 0 になる。辺 P_1P_2 では $\xi_3=\xi_4=0$ であるため、関数値は 0 であるが法線方向微分値は 2 次関数で変化し端点の値からは一意に定めることができない。そこで対象の辺上の中点の法線方向微分値を用いて一意

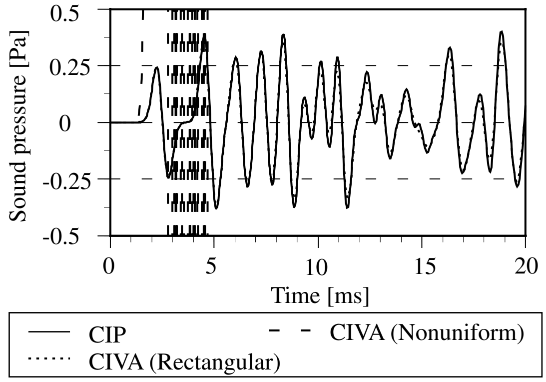

Fig. 14 Pseudo impulse responses at R0 calculated by the CIP method and the CIVA method using rectangular-based elements and nonuniform elements which are compatible on the edges(3D).

に定める。ただし辺 P_1P_2 の法線方向は、$\triangle P_1P_2P_3$ と $\triangle P_2P_1P_4$ の法線方向 $\mathbf{n}_{\triangle P_1P_2P_3}, \mathbf{n}_{\triangle P_2P_1P_4}$ の平均

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{n}_{\triangle P_1P_2P_3}}{\left|\mathbf{n}_{\triangle P_1P_2P_3}\right|} + \frac{\mathbf{n}_{\triangle P_2P_1P_4}}{\left|\mathbf{n}_{\triangle P_2P_1P_4}\right|}\right) \qquad (13)$$

で与えられるとし、中点での法線方向微分値は端点 P_1, P_2 の法線方向微分値の平均で与えられると仮定した。Fig. 14 に直交分割の等積 6 分割による 4 面体要素による場合と不均一な 4 面体要素による場合を示す。前者は収束したものの、後者は発散している。

5.3.2 要素界面での適合要素化

要素界面、例えば $\triangle P_2P_3P_4$ 上で

$$\epsilon_{234} = \frac{\xi_1\xi_2^2\xi_3^2\xi_4^2}{(1-\xi_2)(1-\xi_3)(1-\xi_4)} \qquad (14)$$

を特異形状関数として稜線上でのものと組み合わせた。しかしながら収束性の改善は見られなかった。

6 まとめと今後の課題

時間離散化幅のみを大きくする手法と時間・空間離散化幅を同時に大きくする手法を比較し、後者の優位性を示した。残響時間は FDTD 法も大差がなかったが、CIP 法は波形の崩れが小さい。また任意形状への対応を目的として CIVA 法の音響問題への適用を行い、2 次元では不均一な 3 角形要素で解析ができることが確認された。3 次元では発散し、適合要素化で収束性は改善したが完全な適合要素化は難しいため不均一なメッシュには対応できなかった。今後の課題は、各点に 2 階微分を持たせる手法が考えられる。

参考文献

[1] 矢部 他, 「CIP 法」, 森北出版, 2003.
[2] 斉藤 他, 信学論, pp. 576-580, 2006. 6.
[3] 太刀岡 他, 建音研資 AA2007-28, 2007. 7.
[4] 太刀岡 他, 音講論 (秋), pp. 979-982, 2007. 9.
[5] 田中, 機械学会論文集 (B 編) 64-620, pp. 103-109, 1998.
[6] 田中 他, 機講論, pp. 227-228, 2003.
[7] 土田 他, 第 17 回数値流体力学シンポジウム F4-1, pp. 1-6, 2003.