

CIP法による時間領域音場解析 FDTD法との比較 *

太刀岡勇氣, 安田洋介, 佐久間哲哉 (東大・新領域)

1 はじめに

時間領域での室内音場解析には、陽解法の時間領域差分法 (FDTD 法) がよく用いられるが、CFL 条件 (式(1)) により、時間離散化幅 Δt に厳しい制限が課せられる (c : 音速、 Δx : 空間離散化幅)。

$$CFL = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (1)$$

一方電磁界・波動解析の分野では 80 年代に特性曲線法と 3 次多項式による補間を組み合わせ、CFL 条件にとらわれない計算を可能にした Constrained Interpolation Profile 法 (CIP 法) [1] が提案されている。近年、音場解析にも適用が進みつつあり [2,3]、伝搬問題に関して、理論解や FDTD 法との比較が行われているが、インピーダンス境界条件導入の検討や、CFL 条件を超える大きな時間ステップを採用した場合の検討はなされていない。本報はそれらについての検討を行う。

2 CIP 法による音響伝搬解析の原理

2.1 CIP 法の原理

CIP 法は、基礎方程式を移流方程式の形に変形し、特性曲線に沿って値を移流させる特性曲線法の一つである。移流元の物理量を求める際にその微分値も用いて、CIP 補間と呼ばれる補間を行う。

2.2 特性曲線法

空気中の波動伝搬は運動方程式と連続の式で表され、1 次元の場合は以下ようになる。

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

(p : 音圧 [Pa], u : 粒子速度 [m/s], ρ : 空気の密度 [kg/m³])

式 (2) に c を掛け、式 (3) との和と差を作ると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c u + p) + c \frac{\partial}{\partial x}(\rho c u + p) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c u - p) - c \frac{\partial}{\partial x}(\rho c u - p) = 0 \quad (5)$$

のようになる。

一般に $\partial_t f + c \partial_x f = 0$ の形の方程式を移流方程式と呼ぶ (微分演算子 $\partial_x = \partial/\partial x$)。この方程式の一般解は、一般の関数 f を用いて $f(x - ct)$ で表され、特性曲線 $x - ct = k$ 上で常に同じ値 $f(k)$ となる。ここで $f_x^+ = \rho c u + p$, $f_x^- = \rho c u - p$ とおくと、式 (4), (5) は、 f_x^+ が正方向に、 f_x^- が負方向にそれぞれ速さ c で伝搬する移流方程式である。そこで Fig. 1 のように、 f_x^+ , f_x^- を特性曲線に沿って移流させることで次ステップの値が求まる。この際 $c\Delta t \neq N\Delta x$ (N は自然数) の場合、格子点以外の場所の値を参照するため、2.3 で述べる CIP 補間によって移流元の値を求める。 $c\Delta t = N\Delta x$ の場合、補間が不要になる。 $N=1$ の場合について後ほど議論する。 p や u の値は、それぞれの和と差より求める。このように移流させるだけなので、FDTD 法と異なり CFL 条件を超える大きな時間ステップでの計算が可能である。

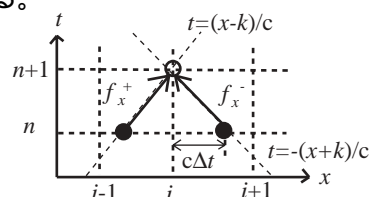


Fig. 1 The up-wind method of solving advection equation.

2.3 CIP 補間

FDTD 法では格子点の p と u の値が与えられている。CIP 法ではこれに加えて p と u の直交方向の微分値も与えられている。これによって数値拡散を小さくできる。例えば Fig. 2 のような急峻な波形が伝搬する問題を考える。ここで黒丸が現ステップの波形、白丸が次のステップの波形である。厳密解のプロフィールは実線で表される。空間 2 次精度の FDTD 法では、(a) の点線のように補間することになり、伝搬とともに波の形が崩れる。

一方 (b) の CIP 法では格子点での値・微分値から 3 次多項式を用いて滑らかに内挿することにより、厳密解のプロフィールを比較的良好に維持できる。式 (4), (5) の両辺を x で微分したものを移流方程式を満たすことから、3 次多項式の未知数決

* Time domain sound field simulation by the CIP method: comparison to the FDTD method, by TACHIOKA Yuuki, YASUDA Yosuke and SAKUMA Tetsuya (The University of Tokyo).

定には、格子点における f_x^+, f_x^- に加えて、 $\partial_x f_x^+, \partial_x f_x^-$ を用いる。

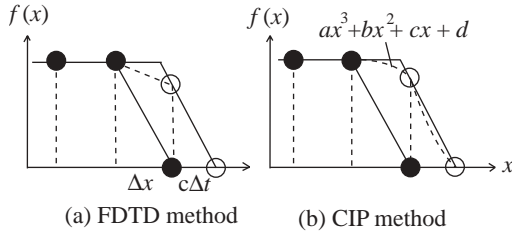


Fig. 2 The FDTD method and the CIP method.

2.4 多次元への適用

多次元化については、多次元空間に3次多項式を作成するA型CIP法などの手法が提案されている。本報では最も基礎的かつ必要メモリー量が少ないため一般的によく用いられるM型CIP法 [1] を採用した。これは Fig. 3 のように多次元を1次元に方向分離するものである。例えば2次元の場合、Fig. 3 の (a) の星印の点が白丸の点に移動することになるが、式 (4), (5) に加え、 y 方向の移流方程式 (6), (7) を解くことで、これを実現する。

$$\partial_t(\rho cv + p) + c\partial_y(\rho cv + p) = 0 \quad (6)$$

$$\partial_t(\rho cv - p) - c\partial_y(\rho cv - p) = 0 \quad (7)$$

ここで、 v は y 方向の粒子速度である。また $f_y^+ = \rho cv + p, f_y^- = \rho cv - p$ とおく。

具体的な手順を示す。

- (i) x 方向に式 (4), (5) によって f_x^+, f_x^- と $\partial_x f_x^+, \partial_x f_x^-$ の移流を行う (Fig. 3 の (b) で星印の点を黒丸の点に移流)。その際、 $\partial_y f_x^+, \partial_y f_x^-$ を1次の上流差分により求める。(x 方向に f_x^+, f_x^- が伝搬する場合には、 x 方向の勾配 $\partial_x f_x^+, \partial_x f_x^-$ が最も重要で、それと垂直な方向の $\partial_y f_x^+, \partial_y f_x^-$ の x 方向への移流に伴う変化はあまり正確である必要がない ([1] p. 71 参照) と仮定したため、メモリー量・計算時間の面で1次上流差分が有利である。)
- (ii) 全格子点に対して $p, \partial_x p, \partial_y p$ の更新を行い、 f_y^+, f_y^- とその微分を再構成する。
- (iii) 式 (6), (7) に従い f_y^+, f_y^- と $\partial_y f_y^+, \partial_y f_y^-$

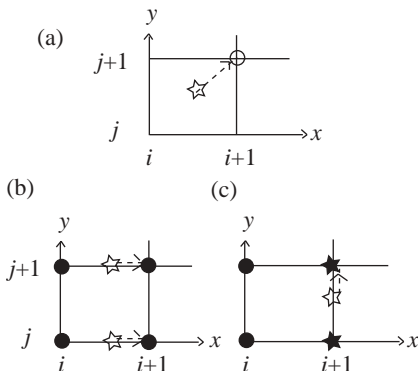


Fig. 3 Procedures of the M-type CIP method.

の移流を行う。(ii)の手順で更新された Fig. 3 (c)の黒星印点から、白星印の点を内挿し移流させる。その際 $\partial_x f_y^+, \partial_x f_y^-$ を1次の上流差分によって求める。

(iv) (ii) を行う。

これを繰り返す。3次元も同様である。

3 伝搬問題

伝搬問題に関して、文献 [2] とほぼ同条件の検討を行った。計算領域は、Fig. 4 に示す1辺0.4 mの立方体領域で、空間離散化幅を4 mm、時間離散化幅を0.0026 ms ($CFL = 0.23$)、音源点Sを(0.1, 0.2, 0.2)、受信点R0を(0.3, 0.2, 0.2)に設定したものである。境界からの反射の影響が受信点にあらわれない0.78 msまでを解析した。初期空間音圧分布を、式 (8) のガウス分布と仮定し、音源の幅を与える定数 d を0.01 mとした。これは数格子でガウス分布を与え15 kHzまでの成分が含まれる非常に急峻な波形である。

$$p(r) = \exp(-r/d)^2 \quad (8)$$

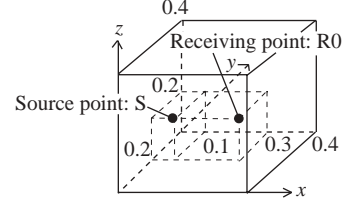


Fig. 4 Geometry of a propagation simulation model.

結果を Fig. 5 に示す。FDTD法では高周波成分の位相速度が遅れる分散が起こっている。CIP法はおおむね伝搬を捕捉しており、既往研究とおおむね同様の結果である。また2.2で述べた $c\Delta t = \Delta x$ となる $\Delta t = 0.012$ [ms] で計算を行い、リサンプリングしたものをCIP法(補間なし)(図中CIP without IP)として示す。補間に伴う誤差がないためCIP法と比べても精度が高い。最大振幅の誤差はCIP法で-14%、FDTD法で-43%、CIP法(補間なし)で+7%であった。

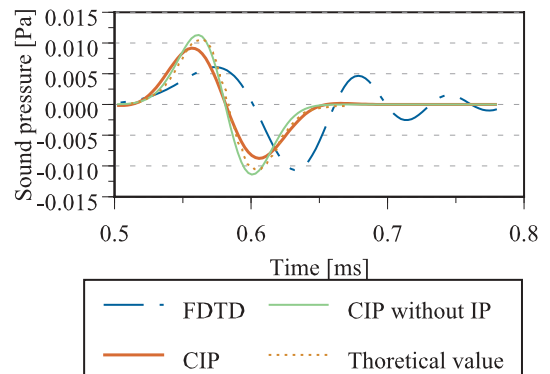


Fig. 6 Pseudo impulse response at R0.

4 室内音場への適用のための検討

伝搬問題解析に比べ複雑な室内音場解析へのCIP法の適用性について、インピーダンス境界条件を導入し検討する。本節では初期空間音圧分布を式(8)の形に仮定し、音源の幅 d を0.13mに統一した。これは音源に含まれる最大周波数が、1kHzの1/3オクターブバンド上限となる音源である。空間離散化幅は最小波長の10分の1程度の1/30m、時間離散化幅は0.05ms($CFL=0.52$)と設定した。FDTD法・CIP法ともに、音源特性・空間離散化幅・時間離散化幅は以後これを用いる。

4.1 インピーダンス境界条件の導入法

インピーダンス境界条件の導入法をFig.7に具体的に示す。現ステップの点が黒丸である。図のような境界層を仮定した場合、負方向に伝搬する f_x^- は(a)のようにそのまま移流させる。(b)のように正方向に移流する f_x^+ も、格子番号1以上はそのまま移流させる。境界層では現ステップの $(f_x^+)^n, (f_x^-)^n$ と $\partial_x (f_x^+)^n, \partial_x (f_x^-)^n$ より $p^n, \partial_x p$ を求め、次ステップの境界層での $(f_x^+)^{n+1}$ と $\partial_x (f_x^+)^{n+1}$ を再構成する。例えば剛壁の場合 $u^{n+1}=0$ であるため、 $(f_x^+)^{n+1} = \rho c u^{n+1} + p^n = p^n$ となる。吸音境界(ノーマルインピーダンス ρc)の場合、 $(f_x^+)^n, (f_x^-)^n$ の差より求まる p^n に対して境界条件より $u^{n+1} = -p^n / \rho c$ であるため、 $(f_x^+)^{n+1} = \rho c u^{n+1} + p^n = 0$ となる。

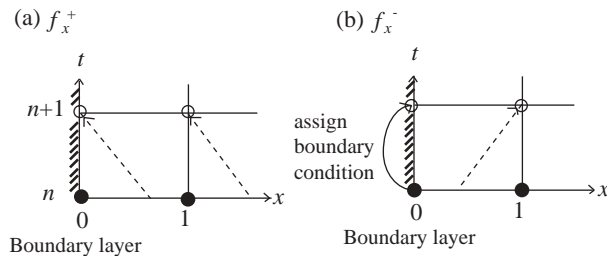


Fig. 7 How to assign boundary condition.

4.2 3次元音場での検討

Fig.8は、日本建築学会音響数値解析小委員会提供のベンチマーク問題の一つで、1辺1mの立方体室で、全面が剛壁により構成されている[4]。

受音点R2における音圧の時間波形をFigs.9,10に示す。Fig.9に示す0msから20msまでの範囲

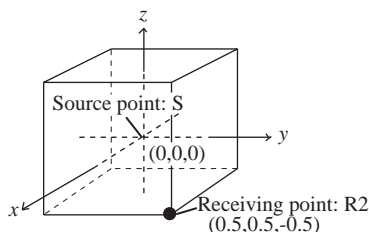


Fig. 8 Geometry of cubic cavity.

では、FDTD法・CIP法ともにおおむねピーク的位置は一致しているものの、主として10ms以降、CIP法のピークの数が少なくなっている。CIP法(補間なし)は、先ほどの伝搬問題では精度が最も高かったが、こちらでは分散が起きている。

Fig.10に示す80msから100msまでの範囲では、CIP法はFDTD法と比べて振幅が小さくなり、波の数も少なくなっているのが顕著である。第3節の伝搬問題においては、既往研究と同様CIP法の精度が高かったが、時間の経過に伴う虚音源の増加を考えると、こちらはFDTD法に妥当性があるように思われる。本来厳密解を与えるはずのCIP法(補間なし)の精度が低かったことから、CIP法の方向分離の妥当性の検証が必要である。またM型CIP法においては、2.4で述べた直交方向の補間のための1次精度の上流差分も精度に影響を与えていると考えられる。伝搬問題では、直交方向の勾配があまり問題にならないため、この補間は妥当であった。しかし、拡散音場のようにあらゆる方向に伝搬が起き、直交方向の勾配も重要であるような音場では、上流差分による数値拡散によって精度が落ちてしまうものと思われる。

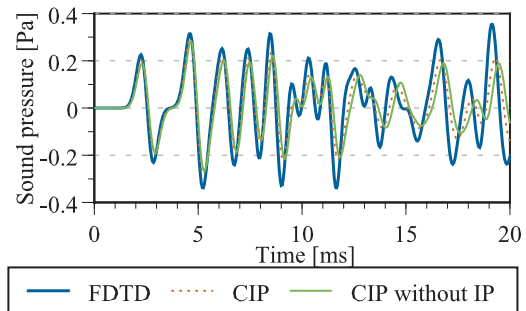


Fig. 9 Pseudo impulse response at R2 calculated by the FDTD method and the CIP method (0-20 ms).

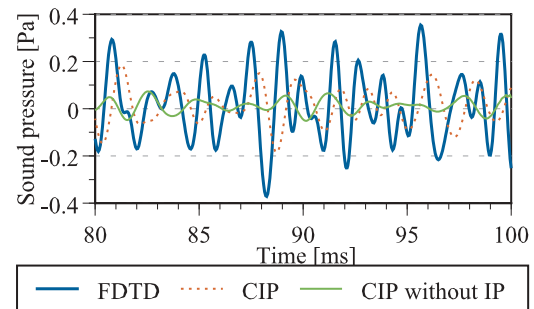


Fig. 10 Pseudo impulse response at R2 calculated by the FDTD method and the CIP method (80-100 ms).

5 CFL条件を超える時間幅での検討

5.1 境界付近での工夫

CIP法において、式(1)に示したクーラン数 CFL が1を超える条件で計算を行う場合、境界付近で境界条件の取扱いに工夫が必要である。

$1 < CFL < 2$ の場合の例を Fig. 11 に示す。求めたい点・与えられている点は、黒丸で示してある。格子番号が $[CFL] + 1$ 以上の点であれば、(i') のように移流させるだけで求まる。しかしながら境界付近 (この場合格子番号 1) では、移流させる点が n ステップの段階から直接的には求まらない。まず $CFL < 1$ となるよう時間分割幅を細かくし $n + 1/2$ ステップに (i) のように移流させ、境界条件を課して白丸の点を求めてから、内挿した星印の点を (ii) のように移流させる。

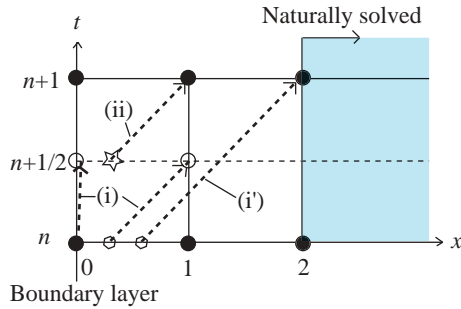


Fig. 11 The region which is naturally solved and the one which is specially dealt with.

5.2 2次元音場での検討

既報[5]では、1次元音場で $CFL = 5.2$ での計算を行った。本報では Fig. 12 に示す $1\text{m} \times 1\text{m}$ の2次元音場を対象にした。周縁部に吸音率 0.5 相当の実インピーダンスを与え、時間離散化幅は FDTD 法で 0.05 ms ($CFL = 0.52$)、CIP 法で 0.05 ms、0.15 ms ($CFL = 1.58$)、0.5 ms ($CFL = 5.2$) で検討した。

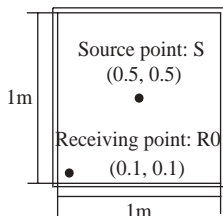


Fig.12 Geometry of a 2D sound field.

結果を Fig. 13 に示す。FDTD 法と CIP 法でおおむね傾向は一致しているものの、時間離散化幅を大きくすると振幅が小さくなっている。ただし

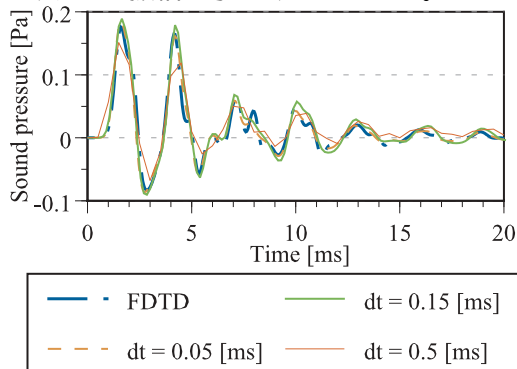


Fig. 13 Pseudo impulse response at R0.

FDTD 法では、2次元の CFL 条件 $CFL \leq 0.71$ を満たす範囲でしか計算できない。

6 計算効率の FDTD 法との比較

6.1 メモリー量

FDTD 法では格子点における p, u_i が必要である。一方 CIP 法ではこれに加えて $\partial_{xj} p, \partial_{xj} u_i$ が必要であるため、FDTD 法と比べて M 次元で $M+1$ 倍は最低でも必要である ($i, j \in \{1 \text{ 以上 } M \text{ 以下の自然数}\}$)。ただし $\Delta t = N\Delta x/c$ であれば、補間は必要なく FDTD 法と同様 p, u_i のみのメモリー量でよい。

6.2 計算量

M 型 CIP 法は移流・内挿プロセス、2.4 (ii) の更新プロセスにおいて計算量が大きい。3次元で単位ステップ当たり 20 倍程度である。 $\Delta t = N\Delta x/c$ であれば内挿が必要ないため、 $N=1$ の場合、FDTD 法の数倍程度で計算できる。

6.3 考察

同じ空間・時間離散化幅では FDTD 法に対する利点はないが、CIP 法は粗い格子でも高精度を維持できる。例えば同じ精度を 2 倍の空間離散化幅で実現できれば、メモリー量は 1/8、計算量は 1/16 に抑えることができ、FDTD 法に匹敵する。

さらに CFL 条件を超える時間幅で計算できれば、FDTD 法以上の高速化が可能である。必要な空間・時間離散化幅に関する検討が必要である。

7 まとめと今後の課題

CIP 法を音場解析に適用した。伝搬問題では高い精度が保たれたが、室内音場問題では、精度が出ない場合もあった。また 2次元において CFL 条件を超える大きな時間ステップで計算を行った。

今後の課題は、室内音場における精度の向上、任意境界形状への対応である。

参考文献

- [1] 矢部 他 「CIP 法」, 森北出版, 2003.
- [2] 斉藤 他 「CIP 法と FDTD 法による球面音波伝搬解析の性能比較」, 信学論, pp. 576-580, 2006. 6.
- [3] 土屋 他 「CIP 法による音波伝搬シミュレーション」, 信学技報 (超音波 US), pp. 1-6, 2006. 11.
- [4] <http://gacoust.hwe.oita-u.ac.jp/AIJ-BPCA/B0-1T/>
- [5] 太刀岡 他 「CIP 法による音場解析」, 建音研資料 AA2007-28, 2007. 7.